Problema 1

1) Poiché la rotazione di R avviene attorno all'asse y, scriviamo l'equazione della parabola come

$$x^2 = 6 - y\ .$$

Il volume richiesto è allora dato da:

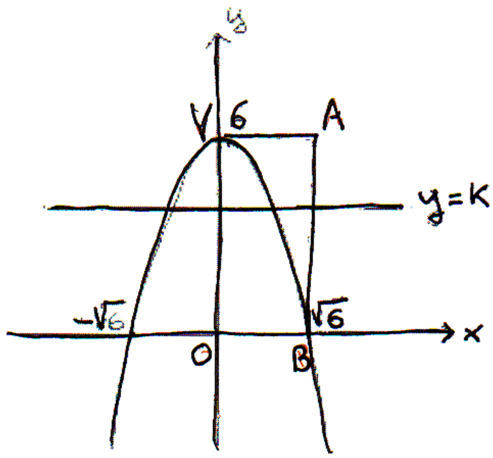
$$V_1 = \pi \int_0 x^2 dt = \pi \int_0^{\sqrt{6}} (6-t)dt = \pi \left[6t - \frac{t^2}{2} \right]_0^6 = 18\pi$$

2) Il nuovo volume è dato dalla differenza fra il Volume V_2 del cilindro ottenuto ruotando il rettangolo ABOV attorno alla retta y=6 e il volume C_2 ottenuto dalla rotazione attorno alla stessa retta del triangolo mistilineo VAB:

$V_2 = 36\pi\sqrt{6}$ e

$$C_2 = \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[6-(6-x^2)\right]^2 dx = \int_0^{\sqrt{6}} x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36\sqrt{6}\pi}{5}$$

In definitiva V_2-C_2=$144\pi\sqrt{6}/5$



3) L'area di R è data da:

$$A = \int_0^{\sqrt{6}} \left[6 - x^2)\right] dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}} = 4\sqrt{6}$$

$$A(k) = \int_0^{\sqrt{6-k}} [\,f(x) - k)]dx = \int_0^{\sqrt{6-k}} \left[6 - x^2 - k\right] = \left[6x - \frac{x^3}{3} - kx \right]_0^{\sqrt{6-k}}$$

quindi deve essere:

$$(6-k)\sqrt{6-k} - \frac{1}{3}(6-k)\sqrt{6-k} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k} = 2\sqrt{6}$$

$$(6-k)^2(6-k) = 54$$

$$(6-k)^3 = 54$$

$$(6-k) = \sqrt[3]{54}$$

$$k = 6 - 3\sqrt[3]{2}$$

4) La tangente a λ nel generico punto di coordinate$(t;\ 6-t^2)$ ha per equazione:

$y-(6-t^2)=-2t(x-t)$

ovvero:

$y=-2tx+t^2+6$

Le intersezioni di questa retta con gli assi hanno coordinate $(0;t^2+6)$ e $\left(\frac{t^2+6}{2t};0\right)$

L'area A(t) è dunque data da:

$$A(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(t^2+6\right)\frac{t^2+6}{2t}=\frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$$

In particolare, otteniamo A(1)=49/4

5) Calcoliamo la derivata prima della funzione A(t):

$$A'(t)=\frac{2(t^2+6)\cdot 2t\cdot 4t-4(t^2+6)}{16t^2}=\frac{(t^2+6)(3t^2-6)}{4t}$$

Allora risulta (per t>0) A'(t)>0 per $3t^2-6>0>$ ovvero per $\sqrt{2}$

L'area A(t) è minima dunque per $t=\sqrt{2}$