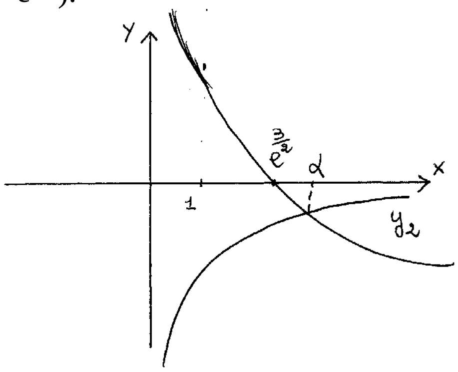
Problema 2

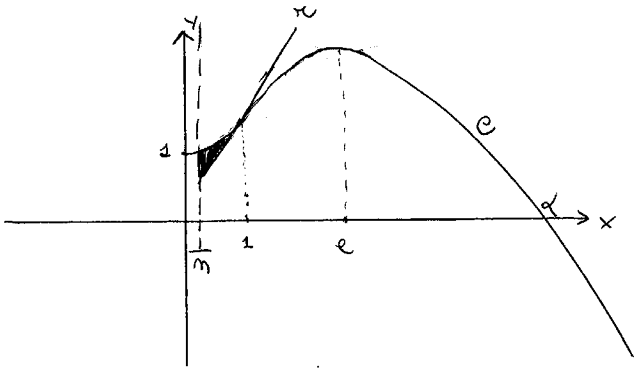
1. La funzione f è continua in x=0 perché:
$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1\right]=f(0)=1$$
(ricordiamo il limite $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = 0$).
La funzione f è anche derivabile in x=0, con $f'(0)$=0, come si deduce dal limite del rapporto incrementale:
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2}h(3-2\log h)=0\,.$$
Questo risultato, invero, rende superflua la precedente osservazione sulla continuità (la derivabilità implica la continuità).
Sempre questo risultato poteva essere ottenuto da una nota condizione sufficiente (anziché dal calcolo del rapporto incrementale): l'esistenza di f' in un intorno destro di x=0 e l'esistenza del suo limite (finito o infinito) per $x\to 0^+$ assicurano la derivabilità (eventualmente con derivata infinita) di f in x=0 con
$$f'(0)=\lim_{h\to 0^+} f'(x)=\lim_{h\to 0^+} 2x(1-\log x)=0\,.$$

2. L'equazione $f(x)$=0 è equivalente a: $\frac{1}{2}x^2(3-2\log x)=-1$
ovvero a: $3-2\log x=-\frac{2}{x^2}$.
Le due curve $y_1=3-2\log x$, $y_2=-\frac{2}{x^2}$ sono quasi elementari. Dal confronto dei loro grafici (per x>0), si vede che effettivamente l'equazione $f(x)$=0 ha un'unica radice reale $x=\alpha$ ($>e^{3/2}$).



3. Per disegnare C effettuiamo i seguenti calcoli:
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (senza che vi sia alcun asintoto obliquo perché l'ordine di infinito è maggiore di 1);
$f'(x)=2x(1-\log x)$
$f'(x)>0$ per $1-\log x>0$ ovvero per x<e
$\rightarrow$ x=e punto di massimo (assoluto);
$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$ $\rightarrow$ x=0 punto a tangente orizzontale;
$f''(x)=2\log x$
$f''(x)>0$ per x<1

$\rightarrow$ x=1 è punto di flesso.



L'equazione della retta *r* è data da:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

ovvero:

$$y = 2x + \frac{1}{2}$$

4. L'area A_n è data dal seguente integrale definito:

$$A_n = \int_{1/n}^{1} [f(x) - r]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{1/n}^{1} \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 - 2x - \frac{1}{2}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{11}{18}x^3 + \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{x^3}{3}\log x\right]_{1/n}^{1} =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{11}{18n^3} - \frac{\log n}{3n^3}$$

Questo valore esprime l'area della regione tratteggiata in figura.

5. $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{9}$