**PNI 2005**

Problema1

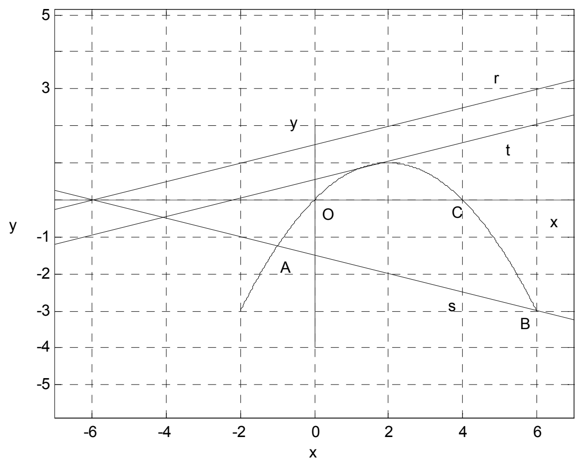
1) Scriviamo in forma esplicita (rispetto a y) le equazioni di λ e di *r*:

$$\lambda: \ y = -\frac{1}{4}x^2 + x \qquad r: \ y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Il sistema delle due equazioni conduce all'equazione di secondo grado in *x*: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0$, che nonha soluzioni reali.

2) Il punto *P* di λ che ha distanza minima dalla retta *r* è il punto (unico) della parabola la cui tangente è parallela alla retta *r*.
Individuiamo nel fascio improprio di rette parallele a *r* quella tangente λ, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = \frac{1}{4}x + q \end{cases}$$




e imponendo che il discriminante sia 0. Si ottiene $q$=9/16 e $x$=3/2. Allora il punto di distanza minima è *P*(3/2;15/16) .
Alternativamente si potrebbe minimizzare la distanza del generico punto della parabola dalla retta, in funzione della ascissa del punto della parabola.

3) L'equazione della retta *s* avrà coeff. angolare –1/4, e intercetta –3/2. La sua equazione è pertanto $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$. Per calcolare l'area richiesta possiamo ricorrere al teorema di Archimede applicato alla parabola che si ottiene dalla differenza tra λ e *s* : $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ .

La corda di base misura $x_B - x_A$ = 6-(-1)=7, mentre l'ordinata del vertice è y(5/2)=49/16.

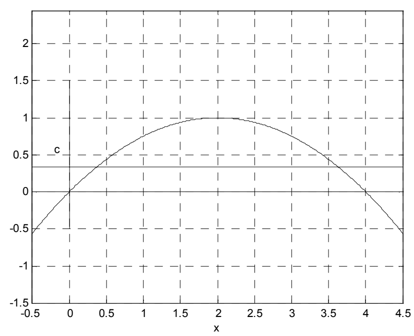
La misura richiesta è $\frac{2}{3} \cdot 7 \cdot \frac{49}{16} = \frac{343}{24}$.

Alternativamente si poteva ricorrere al calcolo integrale:

$$\int_{-1}^{6} \left( -\frac{1}{4}x^2 + x - \left( -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \right) \right) dx = \left[ -\frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{6} = \frac{343}{24}$$

4) Utilizzando ancora il teorema di Archimede abbiamo che in una data parabola l'area del segmento parabolico è proporzionale al cubo della corda di base; del resto sappiamo che la corda di base è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza. Se ne conclude che l'area è proporzionale a $\sqrt{h^3}$ . Allora da $\sqrt{h^3} = \frac{1}{2}$ si deduce $h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

Il valore di *c* cercato è $1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ (ricordiamo che l'ordinata del vertice è 1).



Alternativamente: l'area della regione S è $\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 1=\frac{8}{3}$. Ora intersechiamo la parabola λ con la retta $y=c$ $(0\le c\le 1)$, quindi applichiamo ancora il teorema di Archimede (o il calcolo integrale) al segmento parabolico generato:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+x \\ y=c \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+4c=0 \Rightarrow \Delta x=4\sqrt{1-c} \Rightarrow A(c)=\frac{2}{3}4\sqrt{1-c}(1-c)=\frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}$$

L'ultima uguaglianza costituisce l'equazione risolutiva da cui si ottiene: $c=1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

5) Poiché ogni sezione del solido ottenuta con un piano ortogonale all'asse $x$, $x=k$ individua un quadrato di lato $-\frac{1}{4}k^2+k$, il volume in questione è dato dall'integrale:

$$\int_0^4\left(-\frac{1}{4}k^2+k\right)^2 dk=\int_0^4\left(\frac{1}{16}k^4-\frac{1}{2}k^3+k^2\right)dk=\left[\frac{1}{80}k^5-\frac{1}{8}k^4+\frac{1}{3}k^2\right]_0^4=\frac{32}{15}$$