

Seconda prova

Matematica - Liceo scientifico - Corso di ordinamento

PROBLEMA 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

dove a è un parametro reale positivo.

- Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x+y=4$.
- Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1,1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
- Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t .
- Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k .

PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC , siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE .

- Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC .
- Amnesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e amnesso che l'angolo \hat{ABC} sia acuto e si abbia inoltre:
 $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

- c. Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.
- d. Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

QUESTIONARIO

1. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA' , BB' , CC' , DD' , in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB . I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb})$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- a. area massima e perimetro massimo;
- b. area massima e perimetro minimo;
- c. area minima e perimetro massimo;
- d. area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

$$\frac{\sin x - \cos x}{x}$$

9. Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

- a. è uguale a zero;
- b. è uguale a 1;
- c. è un valore diverso dai due precedenti;
- d. non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

$$\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$$

10. Si consideri la funzione $\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \rightarrow +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.