Quesito 1)

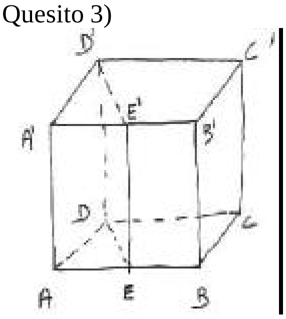
Affermare che f(x) $\rightarrow$ *l* per x $\rightarrow$ a implica f(a) = *l*, equivale a richiedere che la funzione f sia continua nel punto x = a.

Quesito 2)

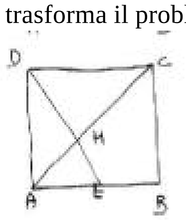
Il limite proposto presenta la forma di indecisione 0/0. Utilizzando il teorema di De L’Hôpital, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt\,/\,2xe^x = \lim_{x\to 0} f(x)/(2e^x + 2xe^x) = f\,0)/\,2 = 1$$

Quesito 3)



Si trasforma il problema in uno di geometria piana, relativa al quadrato ABCD.



E’ comodo utilizzare il riferimento cartesiano ortogonale nel quale A è l’origine ed E è il punto unitario sull’asse delle x. Si hanno pertanto le equazioni y = x (per la retta AC) e y = -2(x-1) per la retta DE. Intersecando le due rette, si trova il punto H = (2/3,2/3); l’area di AEH vale quindi 1/3. L’area del quadrilatero BCHE è data da 2 – 1/3 = 5/3 ed è perciò il quintuplo dell’area del triangolo.

Quesito 4)

Il tronco di piramide si ottiene come differenza tra due piramidi simili; il rapporto di similitudine è uguale alla radice quadrata del rapporto tra due superfici corrispondenti: √B /√b .
Detta H l’altezza della piramide maggiore, si ha h : (√B - √b) = H : √B da cui H = h √B/(√B - √b). Analogamente otteniamo H – h = h √b/ (√B - √b).
Calcoliamo ora il volume del tronco di piramide:

$$V = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}b(H-h) = ... = \frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb})$$

Quesito 5)

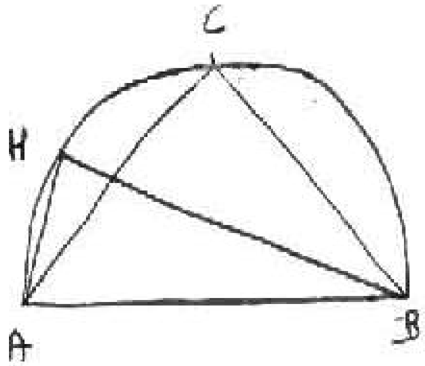
Siano x_1,x_2 due punti qualsiasi dell’intervallo [a,b]. Utilizzando il teorema del valor medio di Lagrange, otteniamo: $(f(x_2) - f(x_1))\,/\,(x_2 - x_1) = 0$ da cui segue $f(x_1) = f(x_2)$.

Quesito 6)

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!(n-k) + k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Quesito 7)



La risposta corretta è la a). Infatti i triangoli inscritti nella semicirconferenza hanno tutti la stessa base AB e quello isoscele ha la massima altezza. Dunque anche la massima area.
Per quanto riguarda il perimetro , detta x la misura di AH e r il raggio della semicirconferenza, si verifica che la funzione
$y = x + \sqrt{4r^2 - x^2}$ ha massimo per x= r√2 (con x ∈ [0,r√2]).

Quesito 8)

F'(x) = $3ax^2 + 4ax - 3$.
L'equazione F'=0 ammette due soluzioni distinte per a< -9/4 o a>0. Per tali valori del parametro la funzione ammette due estremanti. Non ne ha se a∈[-9/4,0).

Quesito 9)

Da $|f(x)| \leq \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x} = \frac{|\sin x|}{x} + \frac{|\cos x|}{x}$

segue facilmente che il limite proposto è uguale a 0.

Quesito 10)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = 1$$

Il teorema di De L'Hôpital non poteva essere utilizzato in quanto la derivata del denominatore (1+sin x) non è definitivamente diversa da zero, per x→∞.