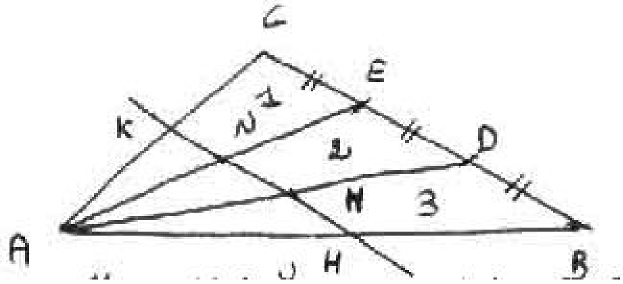
PROBLEMA 2



a) La retta MN è parallela al lato BC per il teorema di Talete sul fascio di rette parallele. Per similitudine $MN = \frac{1}{2}ED$; quindi l'area del trapezio DENM è uguale a $\frac{3}{4}ED \cdot h$; dove h è la distanza fra le rette BC e MN. Si verifica che anche l'area dei trapezi 1 e 3 (con riferimento alla figura) è uguale. Inoltre, questo è anche il valore dell'area del triangolo AHK (che è uguale a $\frac{1}{2}HK \cdot h$)

b) L'area del triangolo ABC è per ipotesi uguale a $\frac{45}{2}a^2 \cdot 4 = 90a^2$. Poiché l'area del triangolo è $\frac{1}{2}AB \cdot BC \operatorname{sen} \hat{B}$, si ottiene $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{12}{13}$ e quindi $\cos \hat{B} = \frac{5}{13}$. Poiché AB = 13a e BD = 5a, si ha che il triangolo ADB è rettangolo in D (inoltre DA = 12a).

c) Si sceglie un riferimento (cartesiano ortogonale) nel quale D è l'origine e gli assi sono dati rispettivamente da (scegliendo come unità di misura a=1):
asse delle x = retta DB orientata positivamente da D a B;
asse delle y = retta DM orientata positivamente da D a M.
In questo modo si hanno le seguenti coordinate per i punti di passaggio della parabola richiesta M(0,-6) , N(-5/2,-6), C(-10,0).
La parabola ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ e si trovano i valori di a, b, c imponendo il passaggio per M, N e C. Si ha precisamente $y = \frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x - 6$.

d) Nel sistema di riferimento indicato, la retta AC ha equazione y = -6/5(x+10). Questa retta interseca la parabola nel punto di ascissa –15/2. Di conseguenza, l'area di una delle regioni richieste (il triangolo mistilineo di vertice A) è data da:

$$\int_{-\frac{15}{2}}^{0} \left(\left(\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{5}x - 6\right) - \left(-\frac{6}{5}(x+10)\right)\right)dx;$$

l'altra è data dalla differenza fra l'area del triangolo A DC (che è uguale a 60) e questo valore.

Calcolando l'integrale di un polinomio, si ha che l'area del triangolo mistilineo che ha vertice in A è uguale a $\frac{135}{8}$ e l'area della rimanente regione è pertanto 60 - $\frac{135}{8} = \frac{345}{8}$.