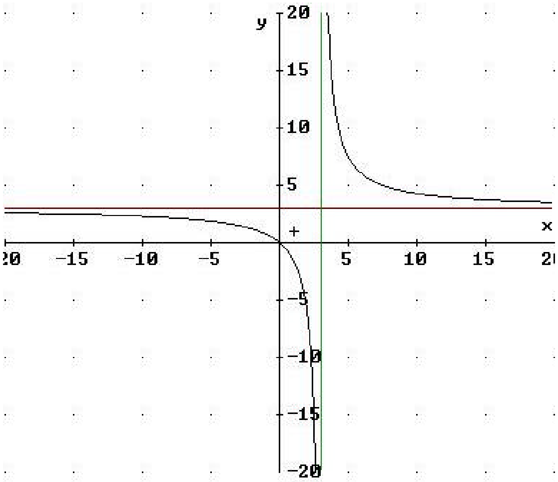
Problema 1

a) La funzione $y=\dfrac{ax}{x-a}$ è un iperbole equilatera (funzione omografica) con asintoti (x=a, y=a) paralleli agli assi.



b) Ponendo a sistema le funzioni $y=\dfrac{ax}{x-a}$ e y=4-x, otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2-4x+4=0$. Imponendo la condizione $\Delta\geq 0$, otteniamo il caso di tangenza per a=1, quello di secanza per a<1.

c) Per calcolare il raggio della circonferenza richiesta, di centro (1,1), calcoliamo anzittutto la distanza d del centro dalla retta y=x-4 : d=$\sqrt{2}$.
In base a semplici considerazioni geometriche (la corda intercettata ha semilunghezza $\sqrt{2}$), otteniamo r=2. La circonferenza ha per equazione $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ ovvero

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

d) L'area della parte di cerchio, che sta al disopra della retta, può essere calcolata come differenza tra l'area del settore circolare e quella del triangolo che ha come vertici il centro della circonferenza e le sue intersezioni con la retta x+y=4.
La prima area è data da $\pi r^2/4=\pi$. La seconda (il triangolo è isoscele rettangolo) è data da 2.
L'area della prima parte del cerchio vale dunque vale dunque π-2. La seconda:
$\pi r^2-(\pi-2)=3\pi+2$.

e) Per questioni di simmetria il punto di tangenza deve appartenere alla retta y=x; ha quindi coordinate $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$
L'iperbole, passando per questo punto, ha per equazione $(a=(1+\sqrt{2})/2)$:

$$y=\frac{(1+\sqrt{2})x}{2x-1-\sqrt{2}}$$