Maturità Scientifica PNI, sessione ordinaria 2000-2001

Problema 1
Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.
Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

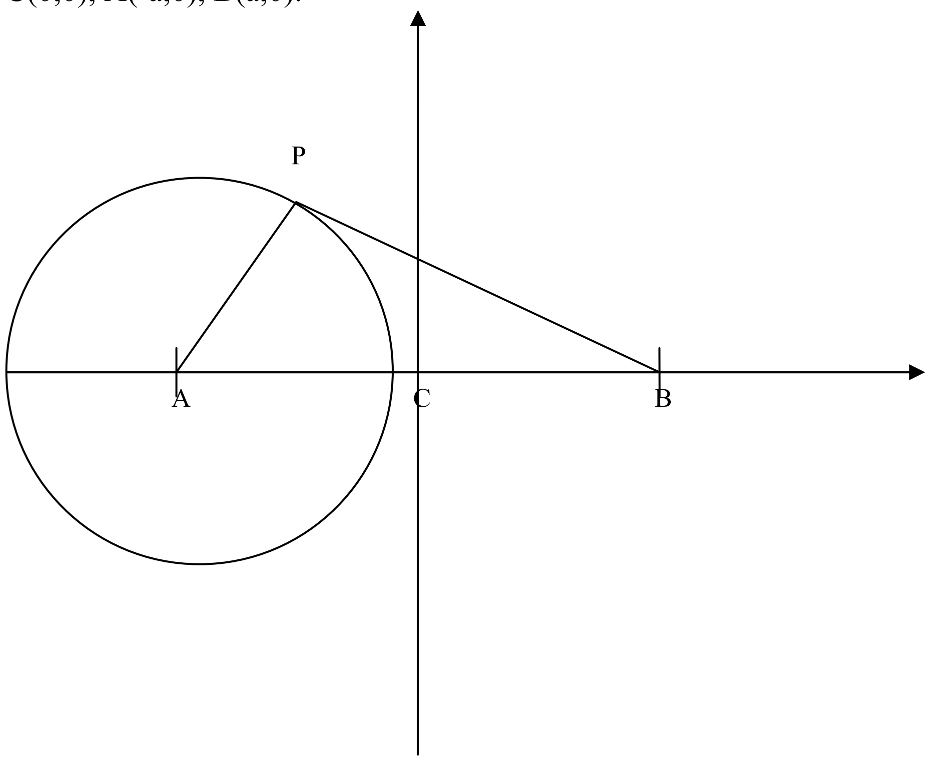
A. Si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta.
B. Si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°.
C. Posto X, appartenente a γ, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$ e $x = \operatorname{tg}\alpha$.

Soluzione

Punto A

Si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta.

Si fissa un sistema di assi cartesiani di origine C e con il segmento AB sull'asse delle x. Si ha C(0,0), A(-a,0), B(a,0).



Posto P(x,y), il luogo dei punti cercato si ottiene dalla relazione $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = k^2$, da cui, osservando che

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$
$$\overline{PB} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

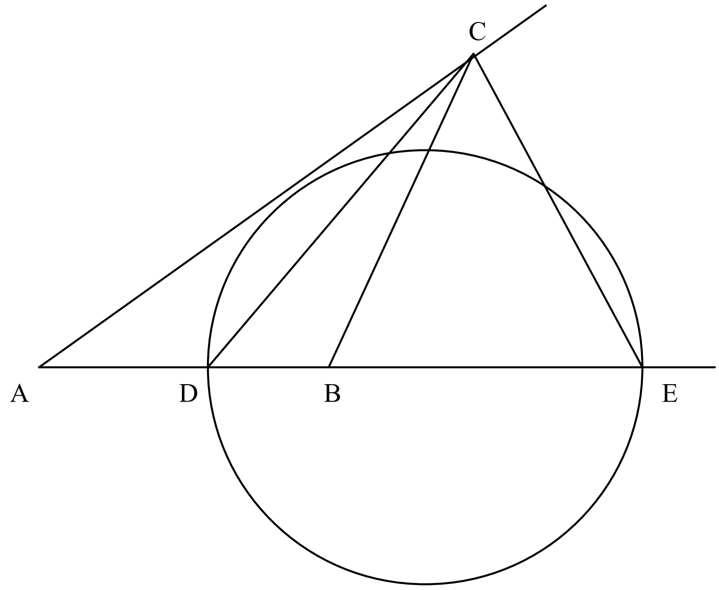
$(x+a)^2+y^2=k^2\left[(x-a)^2+y^2\right]\Rightarrow$

$(1-k^2)x^2+(1-k)^2y^2+2a(1+k^2)x+a^2(1-k^2)=0$

Per k=1 l'equazione degenera nell'equazione di una retta e precisamente 4ax=0, ossia x=0.

Per $K\neq 1$ si ha l'equazione di una circonferenza di centro $C\left(-a\dfrac{1+k^2}{1-k^2},0\right)$ e raggio $r=\dfrac{2ak}{\left|1-k^2\right|}$.

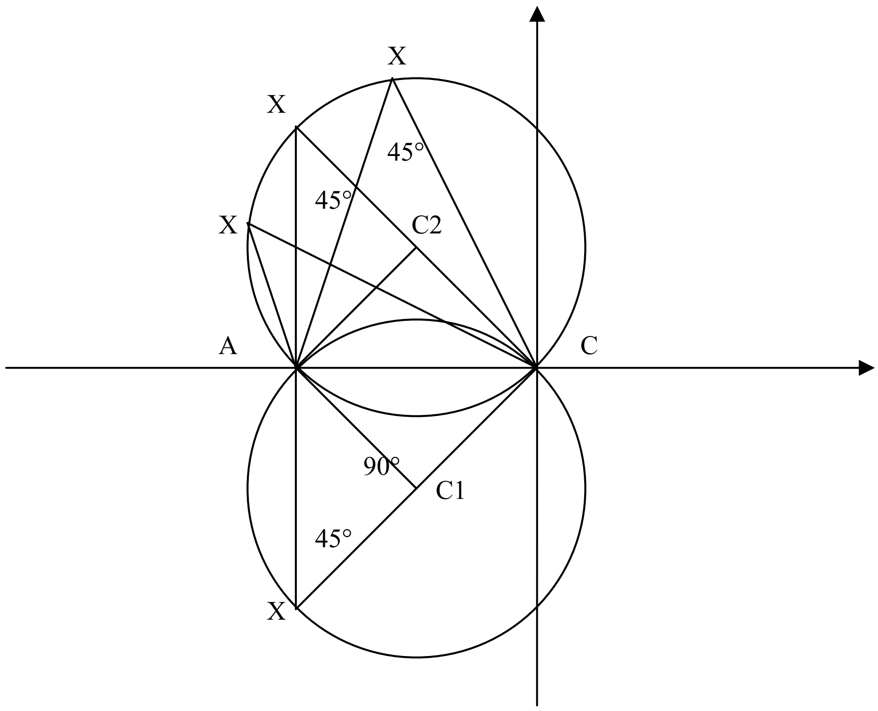
Circonferenza di Apollonio (da Apollonio di Perge, vissuto tra il 265 e il 170 a.C.) relativa a due punti fissi A e B e un numero positivo k è il luogo dei punti P per i quali $\overline{AP}=k\overline{BP}$. *Questo luogo corrisponde a una circonferenza che ha un diametro sulla retta AB.*
Circonferenza di Apollonio relativa a un triangolo ABC è, invece, quella che ha per diametro il segmento DE, dove D è il punto in cui la bisettrice all'angolo interno in C interseca il lato AB, mentre E è il punto in cui la bisettrice dell'angolo esterno in C incontra il prolungamento del lato AB. I punti ABDE formano un gruppo armonico, ossia $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{BE}$.



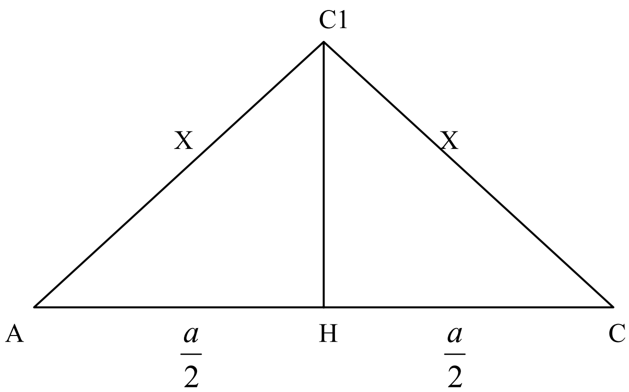
Cerchio di Apollonio relativo a un triangolo

<u>Punto B</u>

Si determini il luogo geometrico γ dei punti *X* che vedono *AC* sotto un angolo di 45°.
Il luogo dei punti X è costituito da due archi di circonferenza che hanno AC come corda. Infatti X è il vertice di angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AC..



L'angolo al centro $A\hat{C}_1C = 90°$ perché l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza $A\hat{X}C = 45°$. Il triangolo AC_1C è un triangolo rettangolo isoscele.



Dal teorema di Pitagora $x^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, dove x è il raggio della circonferenza.

Anche il triangolo C_1HC è rettangolo isoscele, per cui $C_1H = \frac{a}{2}$.

La circonferenza γ_1 ha centro $C_1\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

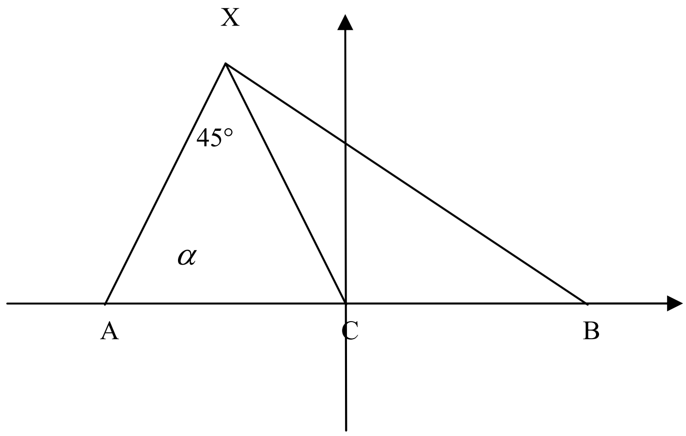
La circonferenza γ_2 ha centro $C_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Il luogo geometrico è quindi

$$\begin{cases} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \\ y < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Punto C

Posto X, appartenente a γ, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$ e $x = \text{tg}\,\alpha$..



$X\hat{A}C = \alpha$

$A\hat{X}C = 45°$

$X\hat{C}A = 135° - \alpha$

Per il teorema dei seni $\frac{\overline{XA}}{sen(135° - \alpha)} = \frac{\overline{AC}}{sen45°} \Rightarrow \overline{XA} = \frac{2a}{\sqrt{2}} sen(135° - \alpha)$, applicando le formule di sottrazione si ottiene $\overline{XA} = a(sen\alpha + \cos\alpha)$.

Per il teorema di Carnot

$\overline{XB}^2 = \overline{XA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{XA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\alpha =$

$= a^2 (sen\alpha + \cos\alpha)^2 + 4a^2 - 2a(sen\alpha + \cos\alpha) 2a \cos\alpha =$

$= a^2 (5 - 2sen\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha)$

$f(x) = \frac{\overline{XB}^2}{\overline{XA}^2} = \frac{5 - 2sen\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha}{sen^2\alpha + \cos^2\alpha + 2sen\alpha\cos\alpha}$, dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\alpha$ si ha

$f(x) = \frac{\frac{5}{\cos^2\alpha} - 2tg\alpha - 4}{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 2tg\alpha}$, tenendo presente la formula $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$ e ponendo $tg\alpha = x$ si ha

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2}$$

Geometricamente si ha la seguente limitazione $0 < \alpha < 135°$, da cui x<-1 o x>0.

Studiamo la funzione indipendentemente dai limiti geometrici della variabile.

Dominio: $1 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-1\}$

Studio del segno e intersezione con gli assi:

f(x)>0 per ogni x, infatti il trinomio $5x^2$-2x+1 ha $\Delta = 4 - 20 < 0$.

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases};\begin{cases} y=0 \\ \textit{nessuna soluzione} \end{cases}$

Studio dei limiti negli estremi del dominio:

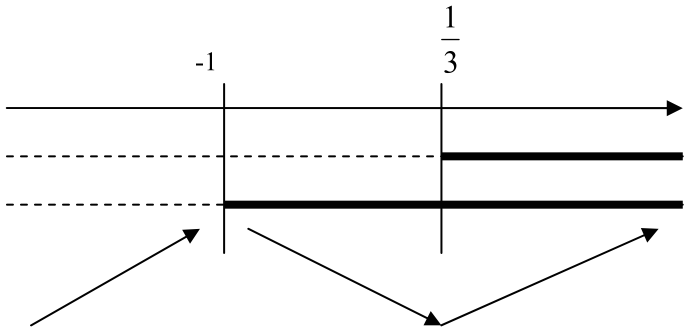
$$\lim_{x\to -1}\frac{5x^2-2x+1}{(1+x)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{5x^2-2x+1}{x^2+2x+1}=5$$

Quindi la retta x=-1 è asintoto verticale per la funzione, la retta y=5 è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Studio della derivata

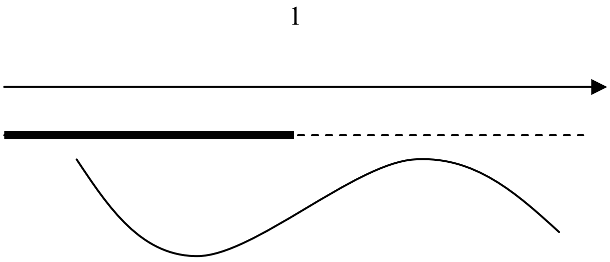
$$f'(x)=\frac{4(3x-1)}{(x+1)^3}\geq 0$$



$M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

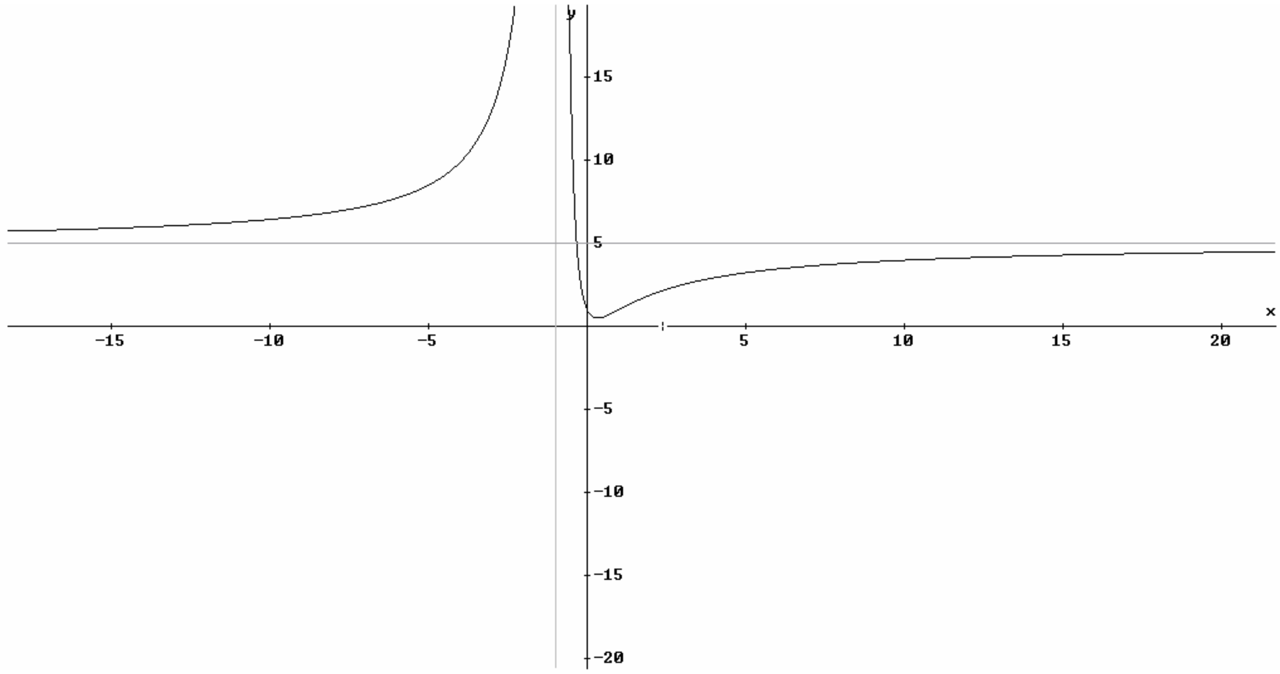
Studio della derivata seconda

$$f''(x)=\frac{24(1-x)}{(x+1)^4}\geq 0$$



F(1,1) è punto di flesso per la funzione.

Grafico


y
15
10
5
x
-15
-10
-5
5
10
15
20
-5
-10
-15
-20