ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA
Svolgimento di Lucio Benaglia, Antonetta De Gennaro, Agostino Miele

QUESITI

QUESITO 1

La relazione che lega i due numeri reali è

$a \cdot b = a + b$ che risolta rispetto a "b" dà

$b = \frac{a}{a-1}$ con $a \neq 1$

Assegnando ad "a" un valore qualsiasi troviamo il corrispondente valore di "b"
Per esempio

$a = \sqrt{2}$
$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

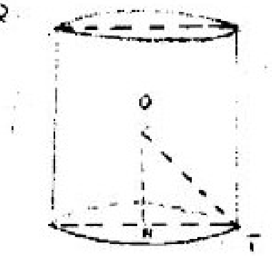
Verifichiamo

$a + b = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

$a \cdot b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2(\sqrt{2}+1).$

QUESITO 2

Il cilindro equilatero ha il diametro di base uguale all'altezza.



$OH = r = HT$

La superficie totale del cilindro è

$$S_{cil} = 2\pi r \cdot 2r + 2 \cdot \pi r^2 = 6\pi r^2$$

Raggio sfera circoscritta $OT = r\sqrt{2}$

$$S_{sfera} = 4\pi \cdot (r\sqrt{2})^2 = 8\pi r^2$$

$$\frac{S_{cil}}{S_{sfera}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}$$

QUESITO 3

La derivata della funzione cercata si deve annullare in $x=1$ e $x=-1$.
La sua espressione sarà del tipo $f'(x)=a(x-1)(x+1)$

La funzione cercata è una primitiva di $f'(x)$

$$f(x)=\int a(x^2-1)\,dx = a\frac{x^3}{3}-ax+c$$

dove, per le condizioni imposte dal testo

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(-1)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}-a+c=3 \\ -\frac{a}{3}+a+c=2 \end{cases} \rightarrow 2c=5 \rightarrow c=\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ c=\frac{5}{2} \end{cases}$$

La funzione cercata è

$$f(x)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

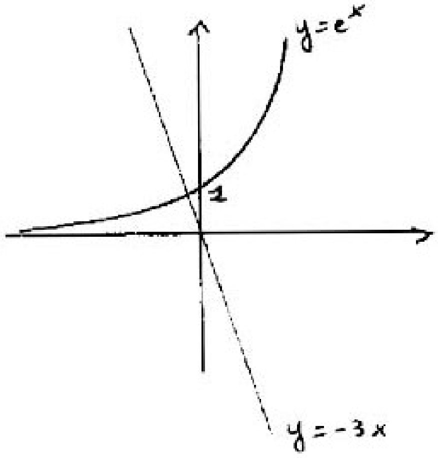
$$f(x)=-\frac{x^3}{4}+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

QUESITO 4

Risolviamo graficamente l'equazione $e^x + 3x = 0$ confrontando le funzioni

$y = e^x$

$y = -3x$



Le curve si intersecano in un solo punto perché $y=e^x$ è monotona crescente con codominio $(0, +\infty)$

$y=-3x$ è monotona decrescente da $(-\infty, +\infty)$.

QUESITO 5

Una possibile funzione non costante è

$$g(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

QUESITO 6

$f(x) = 3 \log x$

$g(x) = \log (2x)^3$

Trasformiamo l'espressione di $g(x)$ applicando le proprietà dei logaritmi

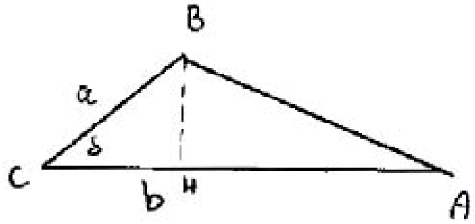
$g(x) = 3 \log 2x = 3 \log 2 + 3 \log x$

Le due funzioni differiscono per la costante additiva $3 \log 2$ $\Rightarrow$ hanno la stessa derivata, in quanto la derivata di una costante è nulla

$f'(x) = \frac{3}{x}$

$g'(x) = \frac{3}{x}$

QUESITO 7



Il triangolo ha area massima (in quanto la base è fissa) quando l'altezza BH è massima.

Ciò accade quando il triangolo è rettangolo

oppure

$A = \frac{1}{2} a b \sin \delta$

$A' = \frac{1}{2} a b \cos \delta$

$\cos \delta > 0 \qquad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ area massima quando $\delta = \frac{\pi}{2}$.

QUESITO 8

Il grado sessagesimale è un $\frac{1}{360}$ di angolo giro.

Un radiante corrisponde all'angolo al centro associato a un arco lungo come il raggio della circonferenza utilizzata.

Il grado centesimale è un $\frac{1}{100}$ di angolo retto

Quesito 9

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$\int \operatorname{arcsen} x \, dx$ applicando il metodo di integrazione per parti

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + K$$

L'integrale definito è

$$\left[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

QUESITO 10

Il numero delle funzioni possibili è $3^4 = 81$, cioè tante quante sono le disposizioni con ripetizione di 3 oggetti di classe 4.