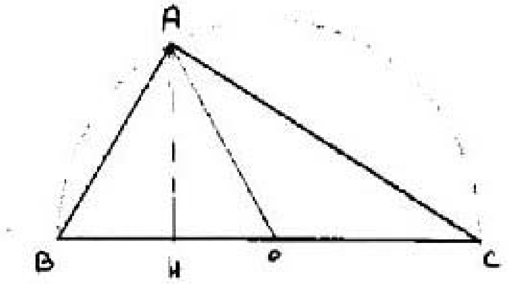
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Svolgimento di Lucio Benaglia, Antonetta De Gennaro, Agostino Miele

PROBLEMA 2



1. Ogni triangolo rettangolo è inscrittibile in una circonferenza di diametro l'ipotenusa.

La mediana relativa all'ipotenusa è congruente al raggio della semicirconferenza ⇒ è metà della ipotenusa.

2. Indichiamo con: a la misura dell'ipotenusa
c la misura del cateto minore
b la misura del cateto maggiore
h la misura di AH.

Dalle uguaglianze

$bc = a \cdot h$ e
$b^2 + c^2 = a^2$ segue

$$b = \frac{a \cdot h}{c}$$

$$\frac{a^2 h^2}{c^2} + c^2 = a^2$$

$$a^2 h^2 + c^4 = a^2 c^2$$

$$c^4 - a^2 c^2 + a^2 h^2 = 0$$

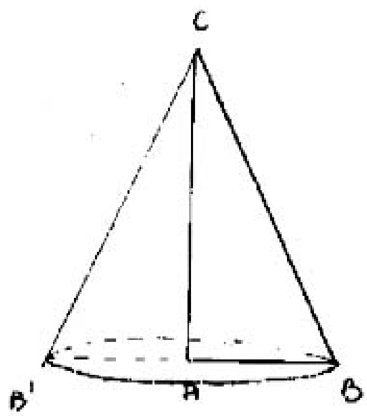
$$c^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2 h^2}}{2}$$ da cui

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{a^2 + 2ah}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ah}{2}} \right)$$

$$b = \frac{\sqrt{2}\, a h}{\sqrt{\frac{a^2+2ah}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2-2ah}{2}}} = \frac{2ah}{\sqrt{a^2+2ah} \pm \sqrt{a^2-2ah}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+2ah} \mp \sqrt{a^2-2ah}}{2}.$$

3.



$BC = \sqrt{3}$ m

Poniamo $AB = x \Rightarrow AC = \sqrt{3 - x^2}$ $\quad (0 < x < \sqrt{3})$

Il volume del cono è

$$V(x) = \frac{\pi}{3} x^2 \cdot \sqrt{3 - x^2}$$

La derivata prima è

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left[2x\sqrt{3-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{3-x^2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{6x - 3x^3}{\sqrt{3-x^2}} = \pi \cdot \frac{2x - x^3}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$V'(x) > 0 \quad \pi \cdot \frac{2x - x^3}{\sqrt{3-x^2}} > 0$$

$x(2 - x^2) > 0$ per $0 < x < \sqrt{2}$

Il volume è massimo per $x = \sqrt{2} \Rightarrow$

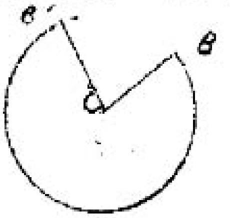
il cono ha raggio di base $\sqrt{2}$ e

altezza 1

In corrispondenza di tali valori il volume

vale $\frac{2}{3}\pi\, m^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^3\, dm^3 = 2.094,4$ litri.

4. Dallo sviluppo della superficie laterale del cono suddetto si ottiene



La lunghezza dell'arco è $2\sqrt{2}\pi$ quindi l'ampiezza dell'angolo α espressa in radianti

è $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\,\pi \simeq 5,13$ rad.

L'ampiezza dell'angolo α espressa in gradi è

$$\alpha^\circ = 180^\circ \cdot \frac{2\sqrt{6}\,\pi}{3\pi} = 293,94^\circ$$