ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE - PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA
Svolgimento di Lucio Benaglia, Antonetta De Gennaro, Agostino Miele

QUESITI 6-10

QUESITO 6 P.N.I

La derivata della funzione cercata si deve annullare in $x=1$ e $x=-1$.
La sua espressione sarà del tipo $f'(x)=a(x-1)(x+1)$

La funzione cercata è una primitiva di $f'(x)$

$$f(x)=\int a(x^2-1)\,dx = a\frac{x^3}{3}-ax+c$$

dove, per le condizioni imposte dal testo

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}-a+c=3 \\ -\frac{a}{3}+a+c=2 \end{cases} \Rightarrow 2c=5 \Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ c=\frac{5}{2} \end{cases}$$

La funzione cercata è

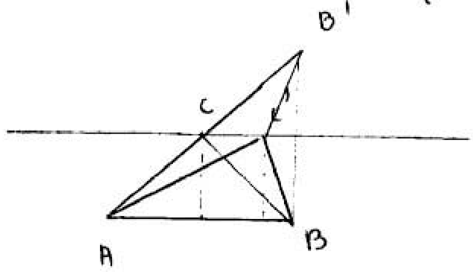
$$f(x)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

$$f(x)=-\frac{x^3}{4}+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

QUESITO 7 P.N.I

Soluzione sintetica

Triangoli di uguale area e assegnata base hanno altezza congruente.
Siano ABC e ABC' due triangoli equivalenti di base AB e sia ABC quello isoscele



- La retta CC' è parallela ad AB.
Detto B' il simmetrico di B rispetto alla retta CC', i punti A, C, B' sono allineati e inoltre $AC + CB = AC + CB' = AB'$

$AC' + C'B = AC' + C'B'$ (perché $BC' = C'B'$)

Nel triangolo $AB'C'$, per la disuguaglianza triangolare è

$A'B' < AC' + C'B'$.

QUESITO 8 P.N.I.

La relazione che lega i due numeri reali è

$a \cdot b = a + b$ che risolta rispetto a "b" dà

$b = \dfrac{a}{a-1}$ con $a \neq 1$

Assegnando ad "a" un valore qualsiasi troviamo il corrispondente valore di "b"
Per esempio

- $a = \sqrt{2}$
  $b = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

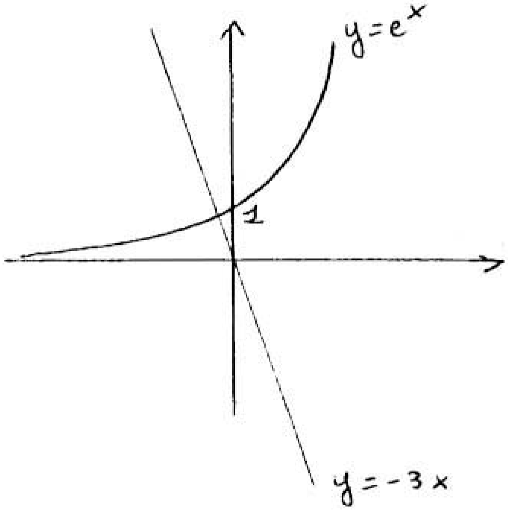
Verifichiamo

$a + b = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

$a \cdot b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2(\sqrt{2}+1)$.

QUESITO 9 P.N.I.

Risolviamo graficamente l'equazione
$e^x + 3x = 0$ confrontando le funzioni
$y = e^x$
$y = -3x$



Le curve si intersecano in un solo punto perché
$y = e^x$ è monotona crescente con codominio $(0, +\infty)$
$y = -3x$ è monotona decrescente da $(-\infty, +\infty)$.
Osserviamo ora che
$f(0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0$ perché $\left(\frac{1}{e} < 1\right)$
$f'(x) = e^x + 3 > 0$ (funzione monotona crescente)
$f''(x) = e^x > 0$ (concavità verso l'alto)
L'equazione ha una radice nell'intervallo $(-1, 0)$
Calcoliamo una approssimazione della radice
con il metodo della tangente assumendo come punto

iniziale $x_0 = 0$.
Applicando la formula

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$ si ha

$$x = 0 - \frac{e^0}{e^0 + 3} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

Applicando successivamente la formula si trova

$x = -0,2576276 \ldots$

QUESITO 10 P.N.I

La matrice della trasformazione assegnata è

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\det A = 3 + 1 = 4$

La struttura della matrice rivela che si tratta di una similitudine che ha un punto unito nell'origine e rapporto di similitudine uguale a 2.

L'equazione cartesiana della trasformazione è

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \\ y' = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \end{cases}$$

La trasformazione può essere vista come prodotto operatorio di una rotazione di $\frac{\pi}{6}$ e una omotetia di rapporto 2.