ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE - PIANO NAZIONALE INFORMATICA
Tema di: MATEMATICA
Svolgimento di Lucio Benaglia, Antonetta De Gennaro, Agostino Miele
PROBLEMA 2

1. Si osservi che

$$f(a) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{a}\cdot a \cos\frac{\pi}{2b}\cdot a + a = \operatorname{sen}\pi \cos\frac{\pi a}{2b} + a = a$$

$$f(b) = \operatorname{sen}\frac{\pi b}{a} \cos\frac{\pi}{2b}\cdot b + b = \operatorname{sen}\frac{\pi b}{a}\cos\frac{\pi}{2} + b = b$$

La funzione assegnata è continua su tutto l'asse reale, in particolare nell'intervallo chiuso $[a,b] \Rightarrow$ assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ almeno una volta.
Il valore $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a+b}{2}$ è assunto almeno una volta.

2. Con le sostituzioni assegnate la funzione diventa

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \cos\frac{\pi}{2}x + x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \cdot \cos\frac{\pi}{2}x + x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x + x$$

Il dominio è D: $(-\infty, +\infty)$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funzione dispari.

Presenta un flesso in $(0,0)$.

Osserviamo che la funzione è somma

di due funzioni

$y_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x$ con $-1 \le \operatorname{sen}\pi x \le 1$

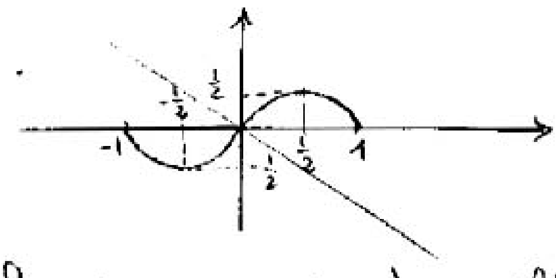
$y_2 = x$

da cui si ricava che

$$x - \frac{1}{2} \le f(x) \le x + \frac{1}{2}$$

La funzione $y_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x$ è periodica di

periodo 2.



Studiamo la funzione assegnata nell'intervallo $[0,1]$ estendendo poi i risultati.

La funzione non ha altri zeri oltre l'origine degli assi, in quanto

$f(x)=0$ da cui

$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x = -x$

Intersecando le curve (vedi grafico precedente) si nota che l'unica intersezione è in $(0,0)$.
Inoltre

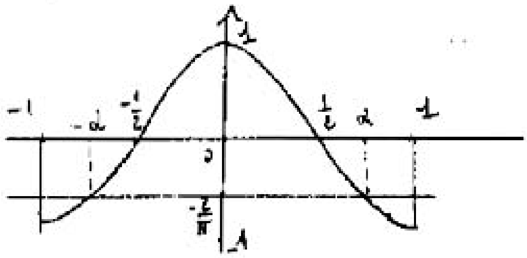
$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x > -x \quad \forall\, x>0$

La funzione $f(x)$ è sempre positiva nell'intervallo $[0,1]$.

$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\pi x + 1$

con $f'(x)=0 \qquad \cos\pi x = -\frac{2}{\pi} \sim 0{,}6$

Studiamo il segno di $f'(x)$ utilizzando un grafico



$f'(x) = 0$ con $x = \alpha$, con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$f'(x) > 0$ con $0 < x < \alpha$ (modulo 2)

$f'(x) < 0$ con $\alpha < x < 1$ (modulo 2)

Da ciò segue che $x = \alpha$ è un massimo relativo e $x = -\alpha$ è un minimo relativo

La derivata seconda è

$f''(x) = -\frac{1}{2}\pi^2 \cdot \text{sen}\, \pi x$

$f''(x) = 0$ per $x = 0$ modulo 1

$f''(x) > 0$ per $-1 < x < 0$ modulo 1 $\cup$

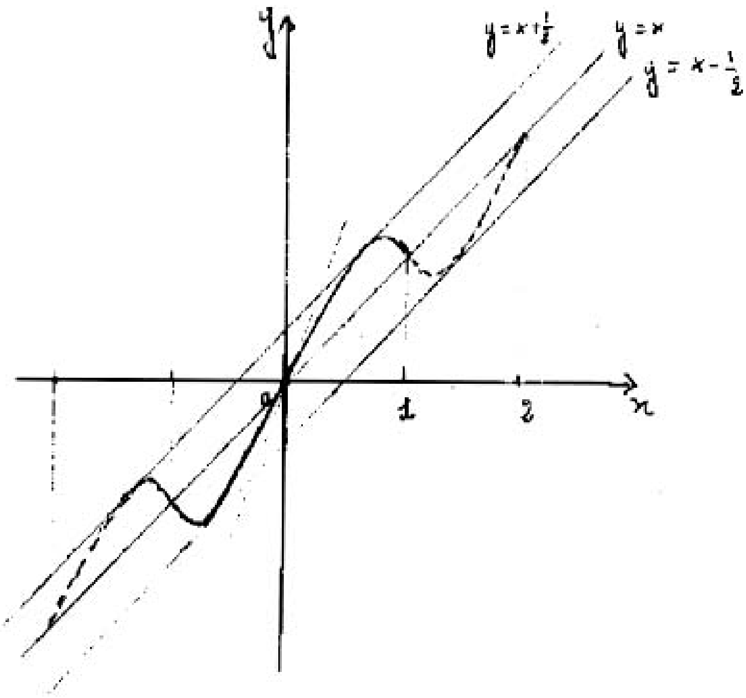
$f''(x) < 0$ per $0 < x < 1$ modulo 1 $\cap$

Calcoliamo la tangente inflessionale in $(0,0)$

$f'(0) = \frac{\pi}{2} + 1 \simeq 2,6$ da cui

$y = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x$

Il grafico della funzione è il seguente.



3. Il primo punto di massimo relativo $(x>0)$ è in $x=\alpha$ con $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

Con il metodo di Newton approssimiamo il valore di α.

Le considerazioni precedenti ci assicurano l'applicabilità del metodo

Il valore approssimato si ottiene con la formula

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \quad ; \text{dove} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$f'(x_0) = 1$$

$$f''(x_0) = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \simeq 0{,}7$$

Iterando il procedimento si migliora l'approssimazione.