

1. La funzione  $y = ke^{-\lambda x^2}$  è definita e positiva per ogni  $x$  reale. La funzione è pari (cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse  $y$ );  $y(0) = k$ .

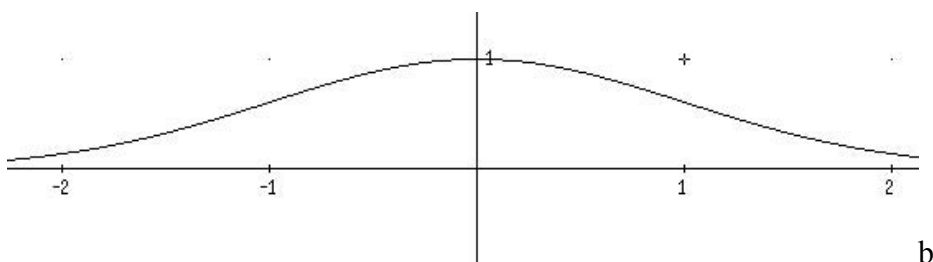
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$  l'asse  $x$  è un asintoto orizzontale per il grafico della funzione.

Dal calcolo e dallo studio della derivata prima  $y' = -2\lambda kxe^{-\lambda x^2}$  si ricava che  $y'$  è positiva per  $x < 0$ , il punto  $(0, k)$  è un massimo assoluto per la funzione.

Dal calcolo e dallo studio della derivata seconda  $y'' = 2\lambda ke^{-\lambda x^2} (2\lambda x^2 - 1)$  si deduce che  $y''$  è

positiva per  $x < -\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$  e  $x > \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ , in tali intervalli la funzione è convessa; mentre nell'intervallo

$\left[-\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right]$  la funzione è concava, i punti  $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$  sono punti di flesso.



2.

Il rettangolo richiesto deve essere necessariamente simmetrico rispetto all'asse delle  $y$ . Indicate con  $x$  e  $-x$  le ascisse dei suoi vertici sull'asse  $x$ , la sua area è:  $A = 2kxe^{-\lambda x^2}$ .

Ricordando l'espressione della  $y'$  – al punto precedente – si ha che l'area è minima per  $x = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ .

3. L'area richiesta è data da:  $A = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ . Per rapportarla al valore  $\sqrt{\pi}$ , operiamo la sostituzione

$x = t\sqrt{2}$ ; otteniamo:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2} dx = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = k\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

Ponendo  $A = 1$ , otteniamo  $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .